

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL COM SEPARAÇÃO DO OPERADOR E COM FATOR INTEGRANTE

Francisco D. Moura Neto¹

Antônio J. Silva Neto²

Instituto Politécnico – UERJ, C.P. 97282, 28601-970 Nova Friburgo, RJ, Brasil

¹fmoura@iprj.uerj.br, ²ajsneto@iprj.uerj.br

Resumo. Neste trabalho são apresentados os métodos de separação do operador e do fator integrante, para a solução da equação de transporte em meios participantes unidimensionais homogêneos, espalhadores isotrópicos, cinzas (sem dependência espectral) e com superfícies transparentes. São apresentados resultados para casos-teste cobrindo uma ampla faixa de valores para o albedo de espalhamento simples e para a espessura óptica. Os resultados para a intensidade da radiação que sai do meio são comparados com aqueles obtidos com o método de ordenadas discretas, demonstrando o bom desempenho computacional dos métodos aqui propostos. Os valores calculados para a refletividade e para a transmissividade estão em boa concordância com resultados publicados. Os maiores desvios nos resultados são observados para meios opticamente espessos e/ou meios altamente espalhadores.

Palavras-chave: Equação de Transporte, Meios participantes, Ordenadas discretas, Separação do operador, Fator integrante.

1. INTRODUÇÃO

A análise da interação de diversos tipos de radiação, tais como partículas neutras, raios gama e fótons, com meios participantes, ou seja, meios emissores, absorvedores e espalhadores, tem aplicações relevantes em engenharia, em ensaios não-destrutivos, bem como em medicina, tanto em diagnóstico quanto em terapia. A modelagem matemática destes fenômenos é feita com a equação linearizada de Boltzmann, também conhecida como equação de transporte.

Silva Neto e Roberty (1998, 1998a) têm desenvolvido a técnica fonte-detector para a solução de problemas inversos em transferência de calor por radiação térmica, transporte de nêutrons em reatores nucleares e tomografia computadorizada com espalhamento (NIROT – Near Infrared Optical Tomography). Kauati et al. (1999) apresentaram os primeiros resultados obtidos com esta técnica para a estimativa do coeficiente de absorção e do coeficiente de espalhamento para meios homogêneos, unidimensionais, cinzas (sem dependência espectral) e espalhadores isotrópicos.

Assim como em outras técnicas desenvolvidas para a solução de problemas inversos, a técnica fonte-detector requer uma solução do problema direto que seja precisa e que seja obtida em um tempo de computação razoável. Como as técnicas para a solução de problemas inversos usualmente consistem de processos iterativos, o problema direto será calculado mais de uma vez, reforçando, portanto, a exigência de um algoritmo para a solução do problema direto que tenha bom desempenho computacional.

Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para a solução da equação de transporte, como por exemplo, método de expansão em harmônicos esféricos (P_N), método de ordenadas discretas (S_N), método de Galerkin base global, métodos de Monte Carlo, e mais recentemente, método F_N (Siewert, 1978) e método YIX (Tan e Howell, 1990), entre outros.

Com o aumento da disponibilidade e da velocidade de processamento dos computadores digitais nas últimas décadas, o método de ordenadas discretas tem atraído o interesse de um grande número de pesquisadores (Fiveland, 1984,1988, Truelove, 1987,1988, Lee e Viskanta, 1997, Moura et al., 1997, Silva et al., ,1997, Sakami et al., 1998). Em um trabalho recente Silva Neto e Roberty (1998b) fizeram uma comparação dos métodos de ordenadas discretas com os métodos P_N e Galerkin base global para um meio unidimensional. Estes dois últimos exigem esforços analíticos e computacionais elevados, enquanto o primeiro leva a resultados dentro do grau de precisão desejado sem estas exigências. Estas observações também são válidas para problemas em duas e três dimensões.

Empregando uma quadratura gaussiana para o termo de espalhamento (in-scattering), analogamente ao que é feito no método de ordenadas discretas, Silva Neto e Moura Neto (1998) resolveram a equação de transporte usando dois métodos: separação do operador (operator splitting) e fator integrante. Neste trabalho é apresentada uma descrição mais detalhada destes métodos para a solução da equação de transporte para meios unidimensionais, homogêneos, espalhadores isotrópicos, cinzas (sem dependência espectral), e com superfícies transparentes. Também é feita uma comparação dos resultados obtidos com estes métodos com aqueles obtidos com o método de ordenadas discretas (S_N).

2. EQUAÇÃO DE TRANSPORTE E ALGUMAS TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

Considere um meio unidimensional homogêneo de espessura óptica τ_0 , cinza, espalhador isotrópico com superfícies externas transparentes, e sujeito a radiação isotrópica externa incidente em uma destas superfícies. A modelagem matemática das interações da radiação com este meio participante é feita com a equação linearizada de Boltzmann, que para o caso com simetria azimutal, e desconsiderando o termo de emissão, é escrita como

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' \quad \text{em } 0 < \tau < \tau_0, -1 \leq \mu \leq 1 \quad (1a)$$

$$I(0, \mu) = 1 \quad , \mu > 0 \quad (1b)$$

$$I(\tau_0, \mu) = 0 \quad , \mu < 0 \quad (1c)$$

onde I é a intensidade da radiação, τ é a variável óptica, τ_0 é a espessura óptica do meio, μ é o cosseno do ângulo polar, ou seja, cosseno do ângulo do feixe de radiação com o eixo τ , e ω é o albedo de espalhamento simples. Nas subseções 2.1 e 2.2 serão descritos os métodos de separação do operador e fator integrante para a solução da equação de transporte.

2.1 Método de separação do operador - SO

Considere uma discretização do domínio espacial de forma que para um determinado nó da malha, i , corresponda a coordenada espacial $\tau_i = i \Delta\tau$, com $i=0,1,2,\dots,N$, sendo $\Delta\tau$ calculado como

$$\Delta\tau = \frac{\tau_0}{N} \quad (2)$$

Neste método, assim como é feito no método de ordenadas discretas, é usado um procedimento iterativo onde são realizadas sequencialmente marchas para frente (de $\tau=0$ para $\tau=\tau_0$) e marchas para trás (de $\tau=\tau_0$ para $\tau=0$).

Marcha para frente. Para cada intervalo do domínio discretizado, escreve-se o primeiro passo com uma parte do operador dado pela Eq.(1a),

$$\mu \frac{\partial I^*(\tau, \mu)}{\partial \tau} = -I^*(\tau, \mu), \quad i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau \quad (3a)$$

$$I^*(i\Delta\tau, \mu) = I(i\Delta\tau, \mu) \quad (3b)$$

observando que para $i=0$

$$I(i\Delta\tau, \mu) = I(0, \mu) = 1 \quad , \mu > 0 \quad (4)$$

O segundo passo para o mesmo intervalo do domínio discretizado, $i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau$, é dado usando a segunda parte do operador,

$$\mu \frac{\partial \bar{I}(\tau, \mu)}{\partial \tau} = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \bar{I}(\tau, \mu') d\mu', \quad i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau \quad (5a)$$

$$\bar{I}(i\Delta\tau, \mu) = I^*((i+1)\Delta\tau, \mu) \quad (5b)$$

de forma que

$$I((i+1)\Delta\tau, \mu) = \bar{I}((i+1)\Delta\tau, \mu) \quad (6)$$

Na Fig.1 é representado esquematicamente o procedimento de cálculo para a marcha para a frente.

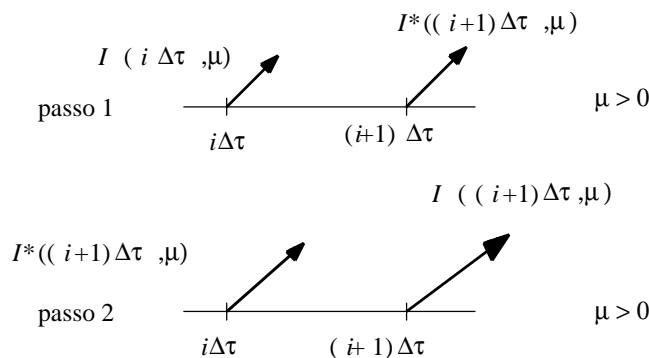


Figura 1 – Separação do operador. Representação esquemática do procedimento de cálculo.

Como em $\tau=0$ a intensidade da radiação é conhecida apenas para $\mu>0$, na marcha para frente são calculadas apenas as intensidades para $\mu>0$.

O problema (3) é de fácil solução analítica,

$$I^*((i+1)\Delta\tau, \mu) = I^*(i\Delta\tau, \mu)e^{\frac{-\Delta\tau}{\mu}} = I(i\Delta\tau, \mu)e^{\frac{-\Delta\tau}{\mu}} \quad (7)$$

Usando uma notação mais compacta,

$$I_m^{*i+1} = I_m^i e^{\frac{-\Delta\tau}{\mu_m}} \quad (8)$$

onde os índices i e m representam, respectivamente, a malha espacial e a malha angular.

Para a solução do problema (5), primeiro é feita a substituição da integral do lado direito da equação por uma quadratura gaussiana,

$$q^i = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \bar{I}(i\Delta\tau, \mu') d\mu' = \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^M a_n \bar{I}_n^i \quad (9)$$

Usando uma aproximação por diferenças finitas para o lado esquerdo da Eq.(5), a Eq.(9), e a notação compacta apresentada na Eq.(8), obtém-se

$$\mu_m \frac{\bar{I}_m^{i+1} - \bar{I}_m^i}{\Delta\tau} = \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^M a_n \bar{I}_n^i = q_i \quad (10)$$

onde a_n são os pesos correspondentes aos pontos de colocação μ_n , $n=1,2,\dots,M$.

Das Eqs.(5b) e (8) escreve-se

$$\bar{I}_m^i = I_m^{*i+1} = I_m^i e^{\frac{-\Delta\tau}{\mu_m}} \quad (11)$$

obtendo-se, então, das Eqs.(10), (11) e (6),

$$I_m^{i+1} = \bar{I}_m^{i+1} = I_m^i e^{\frac{-\Delta\tau}{\mu_m}} + \frac{\Delta\tau}{\mu_m} q^i, \quad m = 1,2,\dots,\frac{M}{2} \quad (\mu > 0) \quad (12)$$

Esta é a equação a ser usada na marcha para frente (forward sweep). As intensidades da radiação são calculadas para todas as direções com $\mu>0$, ou seja, $m=1,2,\dots,M/2$, de $i=0$ até $i=N-1$. Atingindo então o ponto $i=N$, é iniciada uma marcha para trás (backward sweep).

Marcha para trás. Para cada intervalo do domínio discretizado, escreve-se o primeiro passo com uma parte do operador dado pela Eq.(1a),

$$\mu \frac{\partial I^*(\tau, \mu)}{\partial \tau} = -I^*(\tau, \mu), \quad i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau \quad (13a)$$

$$I^*((i+1)\Delta\tau, \mu) = I((i+1)\Delta\tau, \mu) \quad (13b)$$

observando que para $i=N-1$,

$$I^*(N\Delta\tau, \mu) = I(\tau_0, \mu) = 0, \quad \mu < 0 \quad (14)$$

O segundo passo para o mesmo intervalo do domínio discretizado, $i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau$, é dado usando a segunda parte do operador,

$$\mu \frac{\partial \bar{I}(\tau, \mu)}{\partial \tau} = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \bar{I}(\tau, \mu') d\mu', \quad i\Delta\tau \leq \tau \leq (i+1)\Delta\tau \quad (15a)$$

$$\bar{I}((i+1)\Delta\tau, \mu) = I^*(i\Delta\tau, \mu) \quad (15b)$$

de forma que

$$I(i\Delta\tau, \mu) = \bar{I}(i\Delta\tau, \mu) \quad (16)$$

De forma análoga àquela apresentada na marcha para a frente obtém-se como solução dos problemas (13) e (15),

$$I_m^i = \bar{I}_m^i = I_m^{i+1} e^{\frac{\Delta\tau}{\mu_m}} - \frac{\Delta\tau}{\mu_m} q^{i+1}, \quad m = \frac{M}{2} + 1, \frac{M}{2} + 2, \dots, M \quad (\mu < 0) \quad (17)$$

Esta é a equação a ser usada na marcha para trás (backward sweep). As intensidades da radiação são calculadas para todas as direções com $\mu < 0$, ou seja, $m = \left(\frac{M}{2}\right) + 1, \left(\frac{M}{2}\right) + 2, \dots, M$, de $i = N - 1$ até $i = 0$. Quando se atinge o ponto $i=0$ é reiniciada a marcha para frente.

O procedimento iterativo com os cálculos seqüenciais das marchas para frente e para trás é interrompido quando o erro relativo em cada ponto da malha espacial e em cada ângulo é suficientemente pequeno, ou seja,

$$\left| I_m^{i^{k+1}} - I_m^{i^k} \right| / I_m^{i^k} < \varepsilon \quad (18)$$

onde ε é uma tolerância definida a priori e k é o contador de iterações.

2.2 Método do Fator Integrante - FI

É aqui adotada a mesma discretização espacial considerada para o método de separação do operador, ou seja, $\tau_i = i\Delta\tau$, com $i=0, 1, 2, \dots, N$, e $\Delta\tau$ dado pela Eq.(2).

Definindo uma nova variável dependente,

$$J(\tau, \mu) = e^{\frac{\tau}{\mu}} I(\tau, \mu) \quad (19)$$

onde $e^{\tau/\mu}$ é o fator integrante, o problema original dado pelas Eqs.(1a-c) é reescrito na seguinte forma

$$\mu \frac{\partial J(\tau, \mu)}{\partial \tau} = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 e^{\tau \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'} \right)} J(\tau, \mu') d\mu' \quad em \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (20a)$$

$$J(0, \mu) = 1 \quad , \mu > 0 \quad (20b)$$

$$J(\tau_0, \mu) = 0 \quad , \mu < 0 \quad (20c)$$

Neste método também é usado um procedimento iterativo onde são realizadas seqüencialmente marchas para frente e marchas para trás.

Usando uma quadratura gaussiana, para o lado direito da Eq.(20a)

$$\frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 e^{\tau \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'} \right)} J(\tau, \mu') d\mu' = \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^M a_n e^{i\Delta\tau \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_n} \right)} J_n^i \quad (21)$$

e uma aproximação por diferenças finitas para o lado esquerdo da mesma, obtém-se para a marcha para frente

$$J_m^{i+1} = J_m^i + \frac{\Delta\tau\omega}{2\mu_m} \sum_{n=1}^M a_n e^{i\Delta\tau\left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_n}\right)} J_n^i, i = 0, 1, 2, \dots, N-1; m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (\mu > 0) \quad (22)$$

com

$$J_m^0 = 1, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (\mu > 0) \quad (23)$$

A equação para a marcha para trás é escrita a partir da Eq.(22),

$$J_m^i = J_m^{i+1} - \frac{\Delta\tau\omega}{2\mu_m} \sum_{n=1}^M a_n e^{i\Delta\tau\left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_n}\right)} J_n^{i+1} \quad i = N-1, N-2, \dots, 0; \\ m = \frac{M}{2} + 1, \frac{M}{2} + 2, \dots, M \quad (\mu < 0) \quad (24)$$

com

$$J_m^N = 0, \quad m = \frac{M}{2} + 1, \frac{M}{2} + 2, \dots, M \quad (\mu < 0) \quad (25)$$

Finalmente, conhecendo-se $J(\tau, \mu)$, a intensidade da radiação, $I(\tau, \mu)$, é calculada a partir da Eq.(19).

O procedimento iterativo com os cálculos seqüenciais das marchas para frente e para trás é interrompido quando o critério dado pela Eq.(18) é satisfeito.

RESULTADOS

Em todos os casos apresentados a seguir foi usada uma quadratura Gauss-Legendre com $M=20$. Na Tabela 1 são mostrados os pontos de colocação μ_m e os pesos a_n correspondentes.

Tabela 1 – Pontos de colocação e pesos para quadratura Gauss-Legendre com $N=20$

μ	a
$\mu_1 = -\mu_{20} = 0,0765265211$	0,1527533871
$\mu_2 = -\mu_{19} = 0,2277858511$	0,1491729864
$\mu_3 = -\mu_{18} = 0,3737060887$	0,1420961093
$\mu_4 = -\mu_{17} = 0,5108670019$	0,1316886384
$\mu_5 = -\mu_{16} = 0,6360536807$	0,1181945319
$\mu_6 = -\mu_{15} = 0,7463319064$	0,1019301198
$\mu_7 = -\mu_{14} = 0,8391169718$	0,0832767415
$\mu_8 = -\mu_{13} = 0,9122344282$	0,0626720483
$\mu_9 = -\mu_{12} = 0,9639719272$	0,0406014298
$\mu_{10} = -\mu_{11} = 0,9931285991$	0,0176140071

Foram realizados os cálculos para os seguintes valores do albedo de espalhamento simples $\omega=0,1; 0,2; \dots; 0,9; 0,95; 0,975$ e $0,995$, e para a espessura óptica $\tau_0=0,1; 1,0$ e $5,0$.

Na Tabela 2 é apresentada uma comparação dos resultados obtidos com os métodos de ordenadas discretas com $N=20$ (S_{20}), separação do operador (SO) e fator integrante (FI), para um meio com $\omega=0,995$ e $\tau_0=5,0$. Silva Neto e Roberty (1998b) fizeram uma comparação do método de ordenadas discretas, S_N , com os métodos P_N e Galerkin base global para o cálculo da intensidade da radiação que sai de um meio unidimensional homogêneo comprovando o bom desempenho computacional do primeiro. Neste trabalho o método S_N será usado, portanto, como referência para comparação.

Tabela 2 – Intensidade da radiação. $\omega=0,995$ e $\tau_0=5,0$.

$I(0, \mu), \mu < 0$						$I(0, \mu), \mu > 0$					
μ	S_{20}	SO	Dif(%)	FI	Dif(%)	μ	S_{20}	SO	Dif(%)	FI	Dif(%)
μ_{20}	0,87210	0,87994	0,90	0,86483	0,83	μ_1	0,09657	0,09963	3,17	0,09446	2,18
μ_{19}	0,84070	0,84709	0,76	0,83507	0,67	μ_2	0,12176	0,12525	2,87	0,11938	1,95
μ_{18}	0,81336	0,81994	0,81	0,80772	0,69	μ_3	0,14439	0,14835	2,76	0,14165	1,90
μ_{17}	0,78893	0,79577	0,87	0,78315	0,73	μ_4	0,16519	0,16962	2,68	0,16212	1,86
μ_{16}	0,76734	0,77439	0,92	0,76144	0,77	μ_5	0,18405	0,18885	2,61	0,18071	1,81
μ_{15}	0,74875	0,75596	0,96	0,74277	0,80	μ_6	0,20067	0,20574	2,53	0,19711	1,77
μ_{14}	0,73339	0,74070	1,00	0,72736	0,82	μ_7	0,21465	0,21993	2,46	0,21094	1,73
μ_{13}	0,72146	0,72884	1,02	0,71541	0,83	μ_8	0,22566	0,23108	2,40	0,22184	1,69
μ_{12}	0,71312	0,72053	1,04	0,70706	0,85	μ_9	0,23345	0,23896	2,36	0,22955	1,67
μ_{11}	0,70846	0,71588	1,05	0,70239	0,86	μ_{10}	0,23783	0,24338	2,33	0,23389	1,66

Tabela 3 – Intensidade da radiação. $\omega=0,995$ e $\tau_0=1,0$.

$I(0, \mu), \mu < 0$						$I(0, \mu), \mu > 0$					
μ	S_{20}	SO	Dif(%)	FI	Dif(%)	μ	S_{20}	SO	Dif(%)	FI	Dif(%)
μ_{20}	0,70426	0,70575	0,21	0,70256	0,24	μ_1	0,28434	0,28523	0,31	0,28365	0,24
μ_{19}	0,62504	0,62579	0,12	0,62413	0,15	μ_2	0,36277	0,36343	0,18	0,36227	0,14
μ_{18}	0,55049	0,55107	0,11	0,54977	0,13	μ_3	0,43776	0,43835	0,13	0,43731	0,10
μ_{17}	0,48809	0,48857	0,10	0,48749	0,12	μ_4	0,50099	0,50152	0,11	0,50058	0,08
μ_{16}	0,43967	0,44009	0,10	0,43914	0,12	μ_5	0,55021	0,55069	0,09	0,54985	0,07
μ_{15}	0,40327	0,40364	0,09	0,40279	0,12	μ_6	0,58730	0,58774	0,07	0,58696	0,06
μ_{14}	0,37655	0,37689	0,09	0,37610	0,12	μ_7	0,61454	0,61496	0,07	0,61423	0,05
μ_{13}	0,35766	0,35799	0,09	0,35724	0,12	μ_8	0,63381	0,63420	0,06	0,63351	0,05
μ_{12}	0,34533	0,34565	0,09	0,34493	0,12	μ_9	0,64640	0,64678	0,06	0,64611	0,04
μ_{11}	0,33872	0,33903	0,09	0,33833	0,12	μ_{10}	0,65315	0,65352	0,06	0,65286	0,04

Os maiores desvios percentuais foram observados para este caso, onde tem-se um meio altamente espalhador, $\omega=0,995$, e opticamente espesso, $\tau_0=5,0$. Os resultados ficam mais precisos com a redução do albedo de espalhamento. Para $\omega=0,1$ foi observada a concordância dos resultados obtidos com todos os métodos até a quarta casa decimal para a radiação refletida, $I(0, \mu)$ com $\mu < 0$, e até a quinta casa decimal para a radiação transmitida, $I(\tau_0, \mu)$ com $\mu > 0$.

Os resultados também ficam melhores com a redução da espessura óptica. Na Tabela 3 são apresentados os resultados para um meio com $\tau_0=1,0$ e $\omega=0,995$.

Para validar de forma independente os resultados obtidos, foram calculadas a reflectividade

$$R = \frac{2\pi \int_0^1 I(0, -\mu) \mu d\mu}{2\pi \int_0^1 \mu d\mu} \quad (26)$$

e a transmissividade da placa

$$T = \frac{2\pi \int_0^1 I(\tau_0, \mu) \mu d\mu}{2\pi \int_0^1 \mu d\mu} \quad (27)$$

sendo feita uma comparação com os resultados obtidos por Lii e Özisik (1973).

Nas Tabelas 4 e 5 são apresentados os resultados de Lii e Özisik bem como aqueles obtidos com os métodos descritos neste trabalho e com o método de ordenadas discretas para meios com espessuras ópticas $\tau_0=0,1$ e $5,0$ e albedos de espalhamento, ω , variando de $0,1$ a $0,995$.

É observada uma excelente concordância dos resultados. Mantendo a coerência com os resultados apresentados anteriormente, os maiores desvios percentuais também foram observados para meios opticamente espessos e/ou para meios altamente espalhadores.

A malha espacial foi discretizada em 4000 intervalos para meios com espessuras ópticas $\tau_0=0,1$ e $1,0$. Para o meio com $\tau_0=5,0$ foram usados 8000 intervalos. Este nível de refinamento não é necessário para a obtenção da convergência dos resultados com o método S_N . Com os outros métodos também podem ser usadas malhas com um número menor de intervalos, mas, de qualquer forma, em todos os casos analisados o nível de refinamento requerido é superior àquele necessário para o método S_N . Porém, o método S_N aqui empregado está em vantagem pelo uso de duas malhas $\tau_{1/2}$, $\tau_{3/2}, \dots, \tau_{N+1/2}$ e $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ (Silva Neto e Roberty, 1998b). Provavelmente os métodos de separação do operador e fator integrante também poderão ser aperfeiçoados de forma a exigir uma malha espacial com menor grau de refinamento.

Tabela 4 – Reflectividade e transmissividade. $\tau_0=0,1$.

Reflectividade					Transmissividade				
ω	Lii e Özisik	S_{20}	SO	FI	ω	Lii e Özisik	S_{20}	SO	FI
0,1	0,0072	0,0074	0,0074	0,0074	0,1	0,8394	0,8396	0,8396	0,8396
0,2	0,0146	0,0150	0,0150	0,0150	0,2	0,8470	0,8470	0,8470	0,8470
0,3	0,0223	0,0228	0,0228	0,0228	0,3	0,8546	0,8547	0,8548	0,8548
0,4	0,0302	0,0309	0,0309	0,0309	0,4	0,8624	0,8627	0,8627	0,8627
0,5	0,0384	0,0392	0,0392	0,0392	0,5	0,8704	0,8709	0,8709	0,8709
0,6	0,0470	0,0479	0,0479	0,0479	0,6	0,8788	0,8794	0,8795	0,8794
0,7	0,0558	0,0568	0,0568	0,0568	0,7	0,8872	0,8882	0,8882	0,8882
0,8	0,0649	0,0660	0,0660	0,0660	0,8	0,8965	0,8973	0,8973	0,8973
0,9	0,0744	0,0756	0,0756	0,0756	0,9	0,9060	0,9068	0,9068	0,9068
0,95	0,0793	0,0805	0,0805	0,0805	0,95	0,9108	0,9116	0,9116	0,9116
0,975	0,0818	0,0829	0,0829	0,0829	0,975	0,9132	0,9140	0,9141	0,9141
0,995	0,0838	0,0849	0,0849	0,0849	0,995	0,9152	0,9160	0,9160	0,9160

Tabela 5 – Reflectividade e transmissividade. $\tau_0= 5,0$.

Reflectividade					Transmissividade				
ω	Lii e Özisik	S_{20}	SO	FI	ω	Lii e Özisik	S_{20}	SO	FI
0,1	0,0217	0,0219	0,0219	0,0218	0,1	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
0,2	0,0463	0,0466	0,0466	0,0466	0,2	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024
0,3	0,0745	0,0750	0,0750	0,0749	0,3	0,0030	0,0030	0,0030	0,0030
0,4	0,1073	0,1080	0,1082	0,1079	0,4	0,0039	0,0039	0,0039	0,0039
0,5	0,1465	0,1475	0,1476	0,1472	0,5	0,0053	0,0053	0,0053	0,0053
0,6	0,1947	0,1958	0,1961	0,1954	0,6	0,0077	0,0077	0,0077	0,0077
0,7	0,2565	0,2579	0,2583	0,2572	0,7	0,0124	0,0124	0,0125	0,0124
0,8	0,3417	0,3432	0,3440	0,3422	0,8	0,0229	0,0229	0,0231	0,0228
0,9	0,4763	0,4781	0,4799	0,4761	0,9	0,0534	0,0534	0,0540	0,0529
0,95	0,5886	0,5904	0,5935	0,5872	0,95	0,0950	0,0950	0,0965	0,0937
0,975	0,6715	0,6733	0,6779	0,6688	0,975	0,1255	0,1354	0,1380	0,1332
0,995	0,7636	0,7649	0,7720	0,7590	0,995	0,1892	0,1887	0,1935	0,1853

O tempo de CPU requerido para a solução de cada caso em um computador pessoal IBM compatível com processador Pentium II 400 MHz é da ordem de segundos. Todos os métodos considerados apresentam, portanto, um bom potencial para a utilização na solução de problemas inversos onde, conforme dito anteriormente, é exigida a solução do problema direto várias vezes.

CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO

Os métodos de separação do operador e do fator integrante, juntamente com o método de ordenadas discretas, permitem a obtenção da solução da equação de transporte para meios participantes unidimensionais com um esforço analítico e computacional muito inferiores a outros métodos tais como expansão em harmônicos esféricos e Galerkin base global. Esta observação é também verdadeira quando o problema está em dimensões superiores (2-D e 3-D).

Os métodos aqui citados se mostram atrativos, portanto, para a utilização na solução de problemas inversos envolvendo a equação de transporte, tal como em aplicações em transferência de calor por radiação térmica, transporte de nêutrons e tomografia com espalhamento.

No momento estamos trabalhando para a extensão dos métodos de separação do operador e do fator integrante para problemas em duas e três dimensões espaciais.

REFERÊNCIAS

- Fiveland, W.A., 1984, Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 699-706.
- Fiveland, W.A., 1988, Three-dimensional radiative heat-transfer solutions by the discrete-ordinates method, *J. Thermophysics*, Vol.2, No.4, pp.309-316.
- Kauati, A.T., Silva Neto, A.J. e Roberty, N.C., 1999, A source detector methodology for the construction and solution of the one-dimensional inverse transport equation, *Proc. 3rd International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Port Ludlow, Washington, EUA.
- Lee, K.H. e Viskanta, R., 1997, Prediction of spectral radiative transfer in a condensed cylindrical medium using discrete ordinates method, *J.Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol.58, No.3, pp.329-345.
- Lii, C.C. and Özisik, M.N.,1973, Hemispherical reflectivity and transmissivity of an absorbing, isotropically scattering slab with a reflecting boundary, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.16, pp. 685-690.
- Moura, L. M., Ballis, D. e Sacadura, J. F., 1997, Análise do método de ordenadas discretas: discretização angular, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Bauru.
- Sakami, M., Charette, A. e Le Dez, V.,1998, Radiative heat transfer in three-dimensional enclosures of complex geometry by using the discrete-ordinates method, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol.59, No. 1/2, pp.117-136.
- Siewert, C.E., 1978, The F_n method for solving radiative transfer problems in plane geometry, *Astrophysics and Space Science*, Vol. 58, pp.131-137.
- Silva, Z. E., Laurent, M., Ballis, D. e Araujo, S. R., 1997, Método das ordenadas discretas associado à forma integral da equação de transferência de radiação em geometria retangular unidimensional, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Bauru.
- Silva Neto, A.J. e Moura Neto, F.D., 1998, Solução da equação de Boltzmann para a modelagem de transporte em meios participantes unidimensionais, *Anais do I Encontro de Modelagem Computacional*, Nova Friburgo.
- Silva Neto, A.J. e Roberty, N.C., 1998, A modelagem da tomografia com espalhamento como um problema inverso, *Anais do IV Fórum Nacional de Ciência e Tecnologia em Saúde*, Curitiba, pp.317-318.

- Silva Neto, A.J. e Roberty, N.C., 1998a, A abordagem fonte-detetor na solução de problemas inversos em meios participantes, Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Fortaleza, Vol. III, pp. 340-347.
- Silva Neto, A.J. e Roberty, N.C., 1998b, Uma comparação do método de ordenadas discretas com outras técnicas para a solução da equação de transporte unidimensional, Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, Vol.II, pp. 878-883.
- Tan, Z. e Howell, J.R., 1990, A new numerical method for radiation heat transfer in nonhomogeneous participating media, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 4, No. 4, pp. 419-424.
- Truelove, J.S., 1987, Discrete ordinate solutions of the radiation transport equation, Journal of Heat Transfer, Vol.109, pp.1048-1051.
- Truelove, J.S., 1988, Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the discrete-ordinates approximation, J.Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol.39, No.1, pp.27-31.

SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL TRANSPORT EQUATION WITH OPERATOR SPLITTING AND INTEGRATING FACTOR

***Abstract.** Operator splitting and integrating factor methods are presented for the solution of the transport equation in one-dimensional, homogeneous, with isotropic scattering, gray (with no spectral dependency) participating media with transparent surfaces. Results are presented for test cases covering a wide range of single scattering albedo and optical thickness values. The calculated values of the exit radiation intensity are compared to those obtained with the discrete ordinates method, demonstrating the good computational performance of the proposed methods. The calculated values for the reflectivity and transmissivity are in good agreement with published values. More pronounced solution deviations are observed for optical thick media and/or highly scattering media.*

***Key-words:** Transport equation, Participating media, Discrete ordinates method, Operator splitting, Integrating factor.*